FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Departman za proizvodno mašinstvo

OPTIMIZACIJA I LOGISTIKA PROIZVODNJE

VEŽBA 11: Metoda raspoređivanja proizvodno-tehnoloških resursa

Prof. dr Dejan Lukić

MSc Dejan Božić

Метода распоређивања

Метода распоређивања представља специјални случај транспортног задатка. Потребно је распоредити n радника на m послова при чему сваки радник може да ради сваки посао, али само један посао у једном тренутку. Задатак распоређивања се може односити не само на распоређивање радника на послове него и на распоређивање машина на послове, радника на машине и слично.

Основна подела при решавању овог проблема је према:

А) Тип модела, отворени и затворени

1. Затворени модел, ако је $n=m$ (број радника=број послова)
2. Отворени модел, ако је $n<m$ или $n>m$

Б) Врста функције циља

1. Минимум функције циља (време израде, трошкови израде, проценат шкарта, итд.)
2. Максимум функције циља (производност, профит, добит, итд.)

Метода распоређивања

Уводе се следеће ознаке:

n- укупан број радника

c_{ij} – ефикасност рада i-тог радника на j-том радном месту

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако i - ти радник ради j - ти посао} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Математички модел задатка распоређивања за **минимум функције циља** гласи:

$$\min f(X) = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

При ограничењима:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$ -један посао извршава један радник

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$ -један радник у једном тренутку ради само један посао

1. Минимум функције циља

1.1 Затворени модел

Пример 1.

Пет радника R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, треба да изврше пет различитих послова P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Сваки радник је оспособљен за извршавање свих послова, али истовремено може да ради само један посао у једном тренутку. Времена потребна сваком раднику за обављање једног посла су дата следећом табелом.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	12	3	3	6	13
R_2	8	2	2	4	5
R_3	4	1	8	10	1
R_4	3	7	3	12	7
R_5	6	4	3	8	4

Табела 1.1

Потребно је извршити расподелу радника на послове тако да укупно време извршења послова буде најкраће.

Корак 1:

У свакој колони проналази се најмањи елеменат и одузима се од свих елемената те колоне.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	12	3	3	6	13
R_2	8	2	2	4	5
R_3	4	1	8	10	1
R_4	3	7	3	12	7
R_5	6	4	3	8	4

→

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	9	2	1	2	12
R_2	5	1	0	0	4
R_3	1	0	6	6	0
R_4	0	6	1	8	6
R_5	3	3	1	4	3

Табела 1.2.

Корак 2:

У сваком реду у коме се не налази ни једна нула одузима се најмањи елеменат. Редови који имају бар једну нулу се преписују неизмењени.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	9	2	1	2	12
R_2	5	1	0	0	4
R_3	1	0	6	6	0
R_4	0	6	1	8	6
R_5	3	3	1	4	3

→

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	8	1	0	1	11
R_2	5	1	0	0	4
R_3	1	0	6	6	0
R_4	0	6	1	8	6
R_5	2	2	0	3	2

Табела 1.3.

Корак 3: Разврставање нула

Све нуле у табели се морају прогласити тј. разврстати на *независне* и *зависне*.

Најпре полазимо од редова које имају по једну необележену нулу. Ту нулу обележимо као независну, а све остале у тој колони обележимо као зависне. Затим у редовима који имају више од једне необележене нуле једну произвољно изаберемо и обележимо као независну, а све остале у том реду и тој колони обележимо као зависне.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	8	1	$\bar{0}$	1	11
R_2	5	1	0^*	$\bar{0}$	4
R_3	1	$\bar{0}$	6	6	0^*
R_4	$\bar{0}$	6	1	8	6
R_5	2	2	0^*	3	2

Табела 1.4.

Независне нуле $\bar{0}$

Зависне нуле 0^*

Потребно је проверити да ли је добијено решење коначно. <u>Ако у сваком реду и свакој колони постоји по једна независна нула, тада је добијено решење оптимално тј. коначно.</u> Како у овом примеру то није случај то прелазимо на следећи корак.

Корак 4: Састоји се из неколико корака:

а) Означити стрелицом (↔) све редове који немају независну нулу. У нашем промеру то је пети ред.

б) Прецртати (осенчити) све колоне које имају зависне нуле у означеним редовима. У нашем промеру то је трећа колона.

ц) Означити стрелицом (→) редове који имају независну нулу у прецртаним колонама. У нашем примеру то је први ред.

Понављати кораке б) и ц) док год је то могуће. У нашем промеру већ корак б) није могуће спровести тако да је корак 4 завршен.

Корак 5:

Прецртати (осенчити) све неозначене редове. У нашем примеру то су други, трећи и четврти ред.

После корака 4 и 5 добија се табела:

	Радници	Послови				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
→	R_1	8	1	$\bar{0}$	1	11
	R_2	5	1	0^*	$\bar{0}$	4
	R_3	1	$\bar{0}$	6	6	0^*
	R_4	$\bar{0}$	6	1	8	6
↔	R_5	2	2	0^*	3	2

Табела 1.5.

Корак 6:

Од свих непрецртаних елемената одредити најмањи (1). Тај елемент додати свим два пута прецртаним елементима (елементима који се налазе у пресеку прецртаних редова и колона) а одузети од непрецртаних елемената. Једном прецртани елементи се само препишу непромењени.

	Радници	Послови				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
→	R_1	8	1	$\bar{0}$	1	11
	R_2	5	1	0^*	$\bar{0}$	4
	R_3	1	$\bar{0}$	6	6	0^*
	R_4	$\bar{0}$	6	1	8	6
↔	R_5	2	2	0^*	3	2

Табела 1.5.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	7	0	0	0	10
R_2	5	1	1	0	4
R_3	1	0	7	6	0
R_4	0	6	2	8	6
R_5	1	1	0	2	1

Табела 1.6.

Затим се понавља поступак почевши од корака 3 тј. од разврставања нула.

У нашем примеру, после разврставања нула добија се табела:

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	7	$\bar{0}$	0^*	0^*	10
R_2	5	1	1	$\bar{0}$	4
R_3	1	0^*	7	6	$\bar{0}$
R_4	$\bar{0}$	6	2	8	6
R_5	1	1	$\bar{0}$	2	1

Табела 1.7.

Како се у сваком реду и свакој колони налази по једна независна нула то долазимо до закључка да смо стигли до краја задатка. Решење се тумачи тако што се положај независних нула прецрта у почетну табелу:

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	12	$\overline{3}$	3	6	13
R_2	8	2	2	$\overline{4}$	5
R_3	4	1	8	10	$\overline{1}$
R_4	$\overline{3}$	7	3	12	7
R_5	6	4	$\overline{3}$	8	4

Табела 1.8.

Дакле, оптималан распоред радника на послове је следећи:
Радник R1 се распоређује посао на P2 који ће извршити за 3 временске јед.
Радник R2 се распоређује на P4 који ће извршити за 4 временске јед.
Радник R3 се распоређује на посао P5 који ће извршити за 1 временску јед.
Радник R4 се распоређује на посао P1 који ће извршити за 3 временске јед.
Радник R5 се распоређује на посао P3 који ће извршити за 3 временске јед.

Дакле укупно време трајања је 3+4+1+3+3=14 временских јединица.

1.2 Отворени модел

Отворени модел се решава тако што се своди на затворени додавањем недостајућих колона тј. редова. Вештачки додате колоне тј. редови представљају фиктивног радника тј. посао. Јединичне цене у тим вештачким редовима или колонама су нуле.
Напомена: Код одабира независних нула треба 'избегавати' вештачки ред тј. колону. То значи да се у вештачком реду тј. колони независне нуле уписују тек на крају задатка када су остале нуле већ разврстане.

Пример 2.

Предузеће је набавило 4 машине P1, P2, P3, P4, специјализоване за производњу производа који је саставни део сложеног склопа. Потребно је запослити четири радника за рад на овим машинама од пријављених пет радника. Предузетник и комисија за пријем радника је утврдила да је основни критеријум за избор радника минимално време израде. Сваки радник је произвео исти број производа на свакој машини при чему је један радник истовремено могао радити на једној машини. Времена потребна за израду производа од стране радника на појединим машинама су дата у табели.

Потребно је извршити избор и расподелу радника на машине тако да продуктивност буде максимална односно укупно време извршења послова најкраће.

Радници	Послови			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	7	3	2	7
R_2	6	12	1	4
R_3	3	4	1	4
R_4	4	8	3	2
R_5	2	3	5	2

Табела 1.9.

Отворени модел се своди на затворени тако што се додаје вештачка колона P5, затим се проблем решава на већ описан начин. Додавањем вештачке колоне добија се табела 1.10.

Напомена: Додавањем колоне са нулама практично се добија ситуација да у сваком реду имамо бар једну нулу па се корак два прескаче.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	7	3	2	7	0
R_2	6	12	1	4	0
R_3	3	4	1	4	0
R_4	4	8	3	2	0
R_5	2	3	5	2	0

Табела 1.10.

После промене прва три корака добија се табела:

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	5	$\overline{0}$	1	5	0^*
R_2	4	9	$\overline{0}$	2	0^*
R_3	1	1	0^*	2	$\overline{0}$
R_4	2	5	2	$\overline{0}$	0^*
R_5	$\overline{0}$	0^*	4	0^*	0^*

Табела 1.11.

Пошто у сваком реду и свакој колони постоји по једна независна нула, добили смо оптимално-коначно решење. Преписивањем положаја независних нула у почетну табелиу добијамо коначно решење.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	7	$\overline{3}$	2	7	0
R_2	6	12	$\overline{1}$	4	0
R_3	3	4	1	4	$\overline{0}$
R_4	4	8	3	$\overline{2}$	0
R_5	$\overline{2}$	3	5	2	0

Табела 1.12

Дакле, оптималан распоред радника на послове је следећи:

Радник R1 се распоређује на машину P2, посао ће извршити за 3 временске јед.

Радник R2 се распоређује на машину P3, посао ће извршити за 1 временску јед.

Радник R3 се распоређује на машину P5 . Како је тај посао фиктиван то значи да ће овај радник остати нераспоређен тј неће добити посао.

Радник R4 се распоређује на машину P4, посао ће извршити за 2 временске јед.

Радник R5 се распоређује на машину P1, посао ће извршити за 2 временске јед.

Дакле укупно време трајања је 3+1+2+2=8 временских јединица.

Пример 3.

Четири радника R1, R2, R3, R4 треба да изврше пет различитих послова P1, P2, P3, P4, P5. Сваки радник је оспособљен за извршавање свих послова, али истовремено може да ради само један посао. Времена потребна сваком раднику за обављање једног посла су дата следећом табелом. Потребно је извршити расподелу радника на послове тако да укупно време извршења послова буде најкраће.

Радници	Послови				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
R_1	5	2	3	1	2
R_2	6	5	7	2	6
R_3	2	10	1	8	3
R_4	9	2	11	12	4

Табела 1.13.

Како је број радника мањи од броја послова то значи да се ради о отвореном моделу. Потребно је додати вештачког радника тј. Ред R5 и затим се проблем решава на већ описан начин.

2. Максимум функције циља

Задатак распоређивања у коме се тражи максимум функције циља се решава тако што се примењују нешто измењени кораци 1 и 2:

Корак 1: Проналази се највећи елемент у свакој колони и одузима се од свих елемената те колоне.

Корак 2: У редовима где нема нула проналази се највећи елемент и одузима се од свих елемената тог реда. Остали редови се само преписују неизмењени.

Како за функцију циља важи:

$$\min F(X) = -\max F(-X)$$

то је потребно све елементе табеле која се добија након примене корака 1 и 2 помножити са -1 и наставити са решавањем задатка као у случају проналажења минимума функције циља.

2.1 Затворени модел

Пример 4.

Четири радника R1, R2, R3, R4 треба да изврше четири различита посла P1, P2, P3, P4. Сваки радник је оспособљен за извршавање свих послова, али истовремено може да ради само један посао. Профит који сваки радник остварује приликом обављања једног посла дат је следећом табелом.

Радници	Послови			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	6	2	4	12
R_2	3	10	2	5
R_3	4	7	1	3
R_4	1	2	1	6

Табела 1.19.

Потребно је извршити расподелу радника на послове тако да укупан профит буде највећи.

После примене прва два корака добија се табела:

Радници	Послови			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	0	-8	0	0
R_2	-3	0	-2	-7
R_3	0	-1	-1	-7
R_4	-2	-5	0	-3

Табела 1.20.

После множења елемената са -1 и разврставања нула добија се табела:

Радници	Послови			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	0^*	8	0^*	$\bar{0}$
R_2	3	$\bar{0}$	2	7
R_3	$\bar{0}$	1	1	7
R_4	2	5	$\bar{0}$	3

Табела 1.21.

Овим је постигнуто коначно решење које гласи:

Радници	Послови			
	P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	6	2	4	$\overline{12}$
R_2	3	$\overline{10}$	2	5
R_3	$\overline{4}$	7	1	3
R_4	1	2	$\overline{1}$	6

Табела 1.22.

Дакле, оптималан распоред радника на послове је следећи:

Радник R1 се распоређује на посао P4, при чему ће остварити профит од 12 н.ј.

Радник R2 се распоређује на посао P2, при чему ће остварити профит од 10 н.ј.

Радник R3 се распоређује на посао P1, при чему ће остварити профит од 4 н.ј.

Радник R4 се распоређује на посао P3, при чему ће остварити профит од 1 н.ј.

Укупан профит који се остварује овим решењем је 27 новчаних јединица.